87. 無限回連續微分可能函數ニ関スル一定理

南雲 道夫（阪大）

無限回連續微分可能ナ函數ハ非常ニ多クノ自由度ヲ有スルコトハ大体想像サレルコトデアルガ、之ニツイテ次ノ簡單ナ定理ヲ紹介シテ置キマセウ。

i 個ノ独立変數（$x_1, \cdots\cdots, x_i$）ニツキ無限回連微可能函數デ $x_1 = \cdots = x_i = 0$ ニ於ケル値及ビスベテノ微係數ガアラカジメ任意ニ與ヘタ値ニ等シイモノガ存在スル。即チ $A_{n_1, n_2, \cdots\cdots, n_i}$ ヲバ任意ノ實數トスル時ニ（$n_1, \cdots\cdots, n_i$ ハ零又ハ任意ノ自然數）

$$\left(\frac{\partial^{n_1 + \cdots + n_i} f}{\partial x_1^{n_1} \cdots\cdots \partial x_i^{n_i}} \right)_0 = A_{n_1, \cdots, n_i}$$

ナル函數 $f(x_1, \cdots\cdots, x_i)$ ガ存在スル。$(\ )_0$ ハ $x=0$ ノ事デアル。

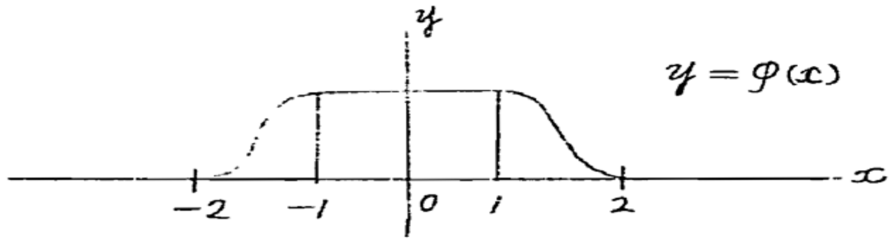
〔証明〕 $\varphi(x)$ ヲバ $x \leqq -2$ デ 0, $-2 \leqq x \leqq -1$ デ正単調増加, $-1 \leqq x \leqq +1$ デ 1, $1 \leqq x \leqq 2$ デ単調減少, $2 \leqq x$ デ 0 ナル無限回連微可能函數トスル．例ヘバ

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & x \leqq 0 \text{ ノ時} \\ e^{\frac{-1}{x(1-x)}} & 0 < x < 1 \text{ ノ時} \\ 0 & 1 \leqq x \text{ ノ時} \end{cases}$$

トスレバ

$$\varphi(x) = \frac{\int_{-\infty}^{x} \left[\psi(t+2) - \psi(t-1) \right] dt}{\int_0^1 \psi(t)\, dt}$$

トスレバヨイ。（図参照）



$\varphi(x_1) \cdots\cdots \varphi(x_i) = \Phi(x)$ トオク.

次ニ $n_1 + n_2 + \cdots\cdots + n_i = n$ トシテ n 次ノ等次多項式 $P_n(x)$ ヲバ

$$P_n(x) = \sum_{\left(\sum_{\nu=1}^{i} n_\nu = n\right)} \frac{A_{n_1, \cdots\cdots, n_i}\, x_1^{n_1} \cdots\cdots x_i^{n_i}}{n_1! \cdots\cdots n_i!}$$

ニヨッテ定義シ,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi(\gamma_n x) P_n(x) \quad (\gamma_n > 0)$$

ナル無限級數ヲ考へ, γ_n ヲ適當ニキメレバ $f(x)$ 及ビソノ高次導函數ノ項別微分ノ級數ハスベテ一様ニ收斂スル。
ソノ理由ハ $\Phi(\gamma_n x) P_n(x)$ ノ $n-1$ 回マデノ導函數ノ値ハ (n 一定トシ) $\gamma_n \to \infty$ ノ時一様ニ零ニ近ヅクカラ, γ_n ヲバ $\Phi(\gamma_n x) P_n(x)$ ノ m 回 ($m \leqq n-1$) 導函數ガスベテ $\frac{1}{2^n}$ $(n>0)$ ヨリ小サクナル様ニキメラレルカラデアル。シカモ尚 f ニツイテノ $x=0$ ニ於ケル n 階ノ導函數ノ値ハ丁度 $P_n(x)$ ノ n 階ノ導函數ノ値ト一致スル。
之デ問題ハ証明サレタ。（詳シクハ讀者自身デ御考へ下サイ）

尚此ノ函數ハ $\sum_{\nu=1}^{i} x_\nu^2 \geqq \varepsilon_0$ デ恒等的ニ零ニ出來マス。$(\varepsilon_0 > 0)$